

L'équation de Schrödinger non-linéaire sur les graphes métriques

Prix de thèse du laboratoire de mathématiques Blaise Pascal

Damien Galant

Franqui Fellow de la
Belgian American Educational Foundation
Brown University



BROWN



CERAMATHS

UMONS

fnrs
LA LIBERTÉ DE CHERCHER

Thèse supervisée par :
Prof. Colette De Coster (CERAMATHS/DMATHS)
et
Prof. Christophe Troestler (UMONS)

Collaborations avec *P. Carrillo* (LmB),
Prof. S. Dovetta (PoliTo), *Prof. L. Jeanjean* (LmB), *Prof. E. Serra* (PoliTo)

Lundi 5 janvier 2026

But de la présentation

Point de départ : le titre

But de la présentation

Point de départ : le titre

The nonlinear Schrödinger equation on metric graphs
(*L'équation de Schrödinger non-linéaire sur les graphes métriques*)

But de la présentation

Point de départ : le titre

The nonlinear Schrödinger equation on metric graphs
(*L'équation de Schrödinger non-linéaire sur les graphes métriques*)

Nous éclairerons deux questions :

But de la présentation

Point de départ : le titre

The nonlinear Schrödinger equation on metric graphs
(*L'équation de Schrödinger non-linéaire sur les graphes métriques*)

Nous éclairerons deux questions :

Quoi ? ? ?

But de la présentation

Point de départ : le titre

The nonlinear Schrödinger equation on metric graphs
(L'équation de Schrödinger non-linéaire sur les graphes métriques)

Nous éclairerons deux questions :

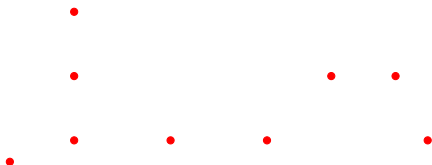
Quoi ? ? ?

Pourquoi ? ? ?

- 1 *Quoi ?* Graphes métriques
- 2 *Quoi ?* L'équation de Schrödinger non-linéaire
- 3 *Pourquoi ?* Un peu de physique
- 4 *Pourquoi ?* Un laboratoire pour la non-compacité
- 5 *Pourquoi ?* Nouveaux phénomènes
- 6 *Pourquoi ?* La contrainte comme source d'inspiration
- 7 Le mot de la fin

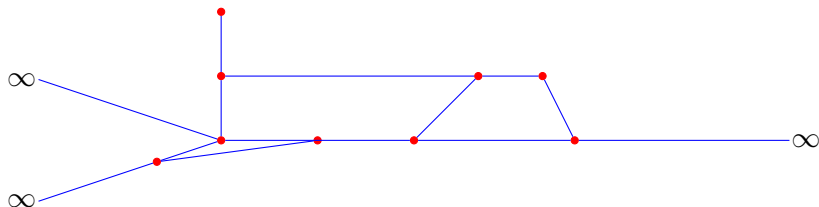
Graphes métriques

Un graphe métrique est composé de **sommets**



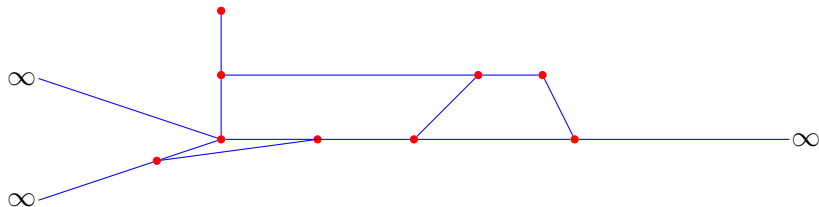
Graphes métriques

Un graphe métrique est composé de **sommets** et d'**arêtes** reliant les sommets ou allant vers l'infini.



Graphes métriques

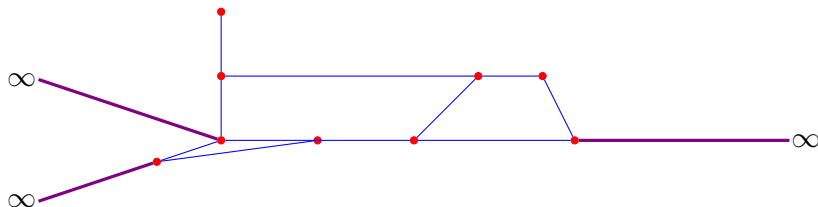
Un graphe métrique est composé de **sommets** et d'**arêtes** reliant les sommets ou allant vers l'infini.



- Graphes *métriques* : les longueurs des arêtes sont importantes.

Graphes métriques

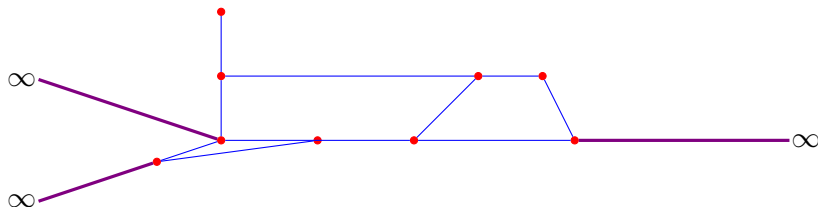
Un graphe métrique est composé de **sommets** et d'**arêtes** reliant les sommets ou allant vers l'infini.



- Graphes *métriques* : les longueurs des arêtes sont importantes.
- Les arêtes allant vers l'infini sont des **demi-droites** et ont une *longueur infinie*.

Graphes métriques

Un graphe métrique est composé de **sommets** et d'**arêtes** reliant les sommets ou allant vers l'infini.



- Graphes *métriques* : les longueurs des arêtes sont importantes.
- Les arêtes allant vers l'infini sont des **demi-droites** et ont une *longueur infinie*.
- Un graphe métrique est *compact* si et seulement si il a un nombre fini d'arêtes de longueur finie.

Graphes métriques

Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite

Graphes métriques

Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite



La droite

Graphes métriques

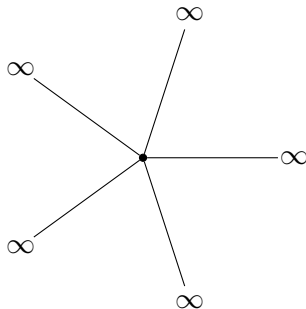
Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite



La droite



L'étoile à 5 branches

Graphes métriques

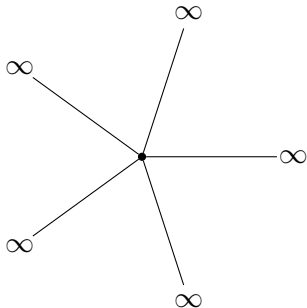
Constructions basées sur des demi-droites



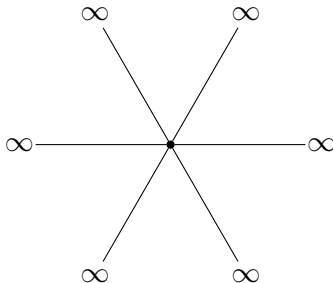
La demi-droite



La droite



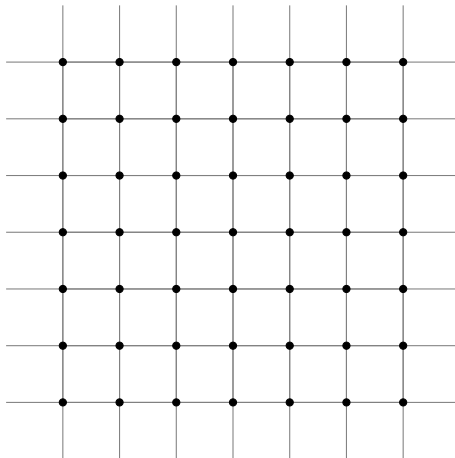
L'étoile à 5 branches



L'étoile à 6 branches

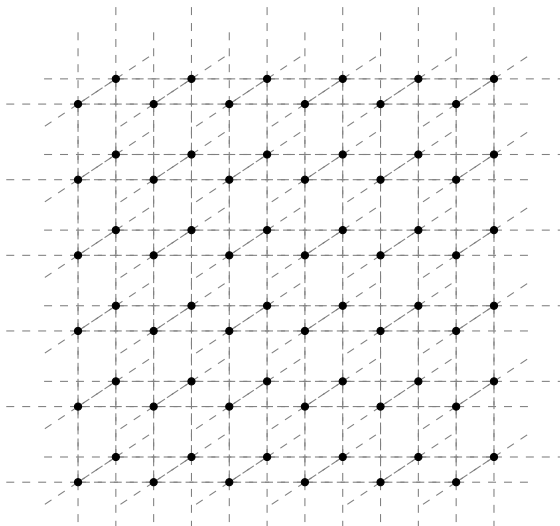
Graphes métriques

Graphes périodiques : la grille bidimensionnelle



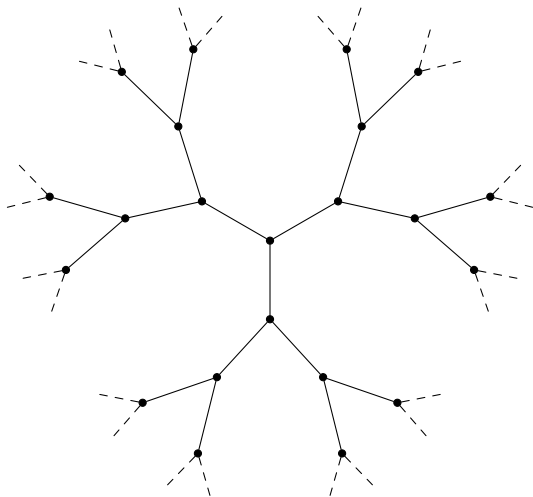
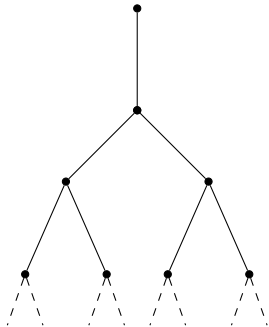
Graphes métriques

Graphes périodiques : la grille tridimensionnelle



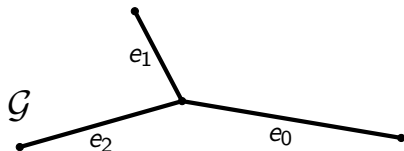
Graphes métriques

Arbres infinis



Graphes métriques

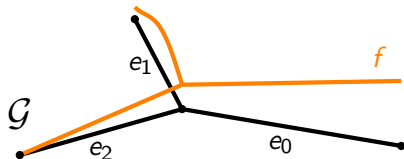
Fonctions définies sur des graphes métriques



Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3)

Graphes métriques

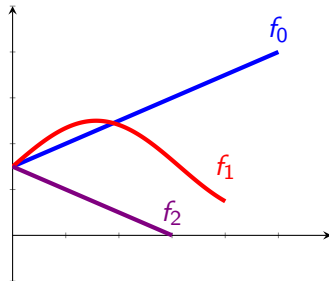
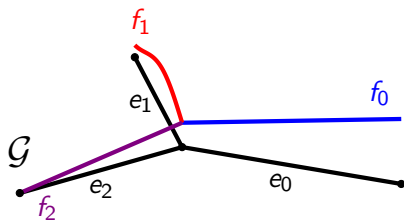
Fonctions définies sur des graphes métriques



Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), une fonction $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$

Graphes métriques

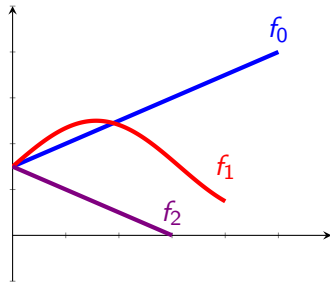
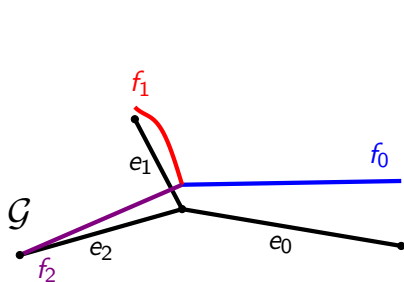
Fonctions définies sur des graphes métriques



Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), une fonction $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, et les trois fonctions réelles associées.

Graphes métriques

Fonctions définies sur des graphes métriques



Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), **une fonction** $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, et les trois fonctions réelles associées.

$$\int_{\mathcal{G}} f \, dx := \int_0^5 f_0(x) \, dx + \int_0^4 f_1(x) \, dx + \int_0^3 f_2(x) \, dx$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Le système différentiel ($\text{NLS}_{\mathcal{G}}$)

Étant donné des constantes $p > 2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons aux solutions $u \in L^2(\mathcal{G})$ du système différentiel

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Le système différentiel $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$

Étant donné des constantes $p > 2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons aux solutions $u \in L^2(\mathcal{G})$ du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u \quad \text{sur chaque arête } e \text{ de } \mathcal{G}, \\ \end{array} \right. \quad (\text{NLS}_{\mathcal{G}})$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Le système différentiel $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$

Étant donné des constantes $p > 2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons aux solutions $u \in L^2(\mathcal{G})$ du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{sur chaque arête } e \text{ de } \mathcal{G}, \\ u \text{ est continue} & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \end{array} \right. \quad (\text{NLS}_{\mathcal{G}})$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Le système différentiel $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$

Étant donné des constantes $p > 2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons aux solutions $u \in L^2(\mathcal{G})$ du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{sur chaque arête } e \text{ de } \mathcal{G}, \\ u \text{ est continue} & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \\ \sum_{e \succ v} \frac{du}{dx_e}(v) = 0 & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}. \end{array} \right. \quad (\text{NLS}_{\mathcal{G}})$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Le système différentiel $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$

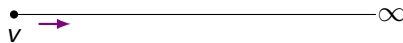
Étant donné des constantes $p > 2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons aux solutions $u \in L^2(\mathcal{G})$ du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{sur chaque arête } e \text{ de } \mathcal{G}, \\ u \text{ est continue} & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \\ \sum_{e \succ v} \frac{du}{dx_e}(v) = 0 & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}. \end{array} \right. \quad (\text{NLS}_{\mathcal{G}})$$

La condition sur la somme des dérivées est appelée *condition de Kirchhoff*.

L'équation de Schrödinger non-linéaire

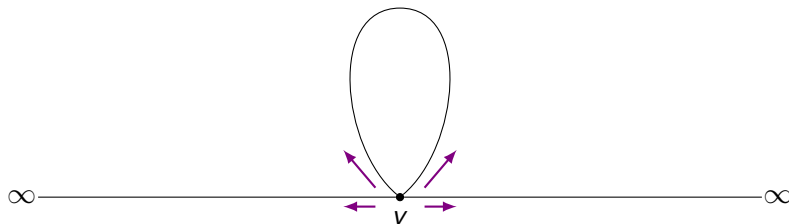
Condition de Kirchhoff : nœuds de degré un



$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{u(v+t) - u(v)}{t} = 0$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

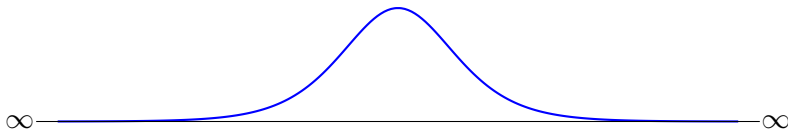
Condition de Kirchhoff en général : dérivées sortantes



$$\sum_{e \succ v} \frac{du}{dx_e}(v) = 0$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Le soliton ϕ_λ sur la droite réelle



L'ensemble des solutions non nulles de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ est

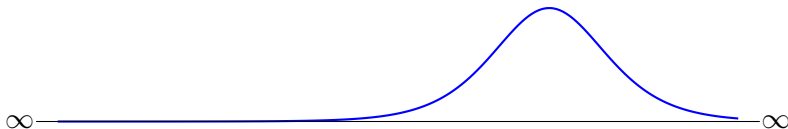
$$\mathcal{S}_\lambda(\mathbb{R}) = \left\{ \pm \phi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

où le *soliton* ϕ_λ est l'unique solution positive et paire de

$$-u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u.$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Le soliton ϕ_λ sur la droite réelle



L'ensemble des solutions non nulles de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ est

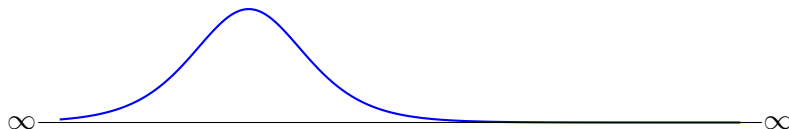
$$\mathcal{S}_\lambda(\mathbb{R}) = \left\{ \pm \phi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

où le *soliton* ϕ_λ est l'unique solution positive et paire de

$$-u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u.$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Le soliton ϕ_λ sur la droite réelle



L'ensemble des solutions non nulles de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ est

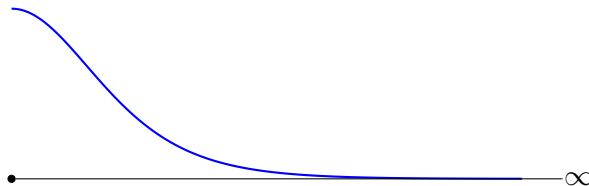
$$\mathcal{S}_\lambda(\mathbb{R}) = \left\{ \pm \phi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

où le *soliton* ϕ_λ est l'unique solution positive et paire de

$$-u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u.$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

La demi-droite : $\mathcal{G} = \mathbb{R}^+$

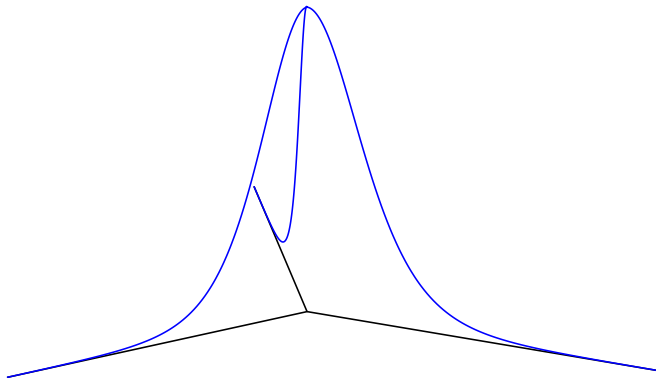


$$\mathcal{S}_\lambda(\mathbb{R}^+) = \left\{ \pm \phi_\lambda(x)|_{\mathbb{R}^+} \right\}$$

Les solutions sont des *demi-solitons* : plus de translations !

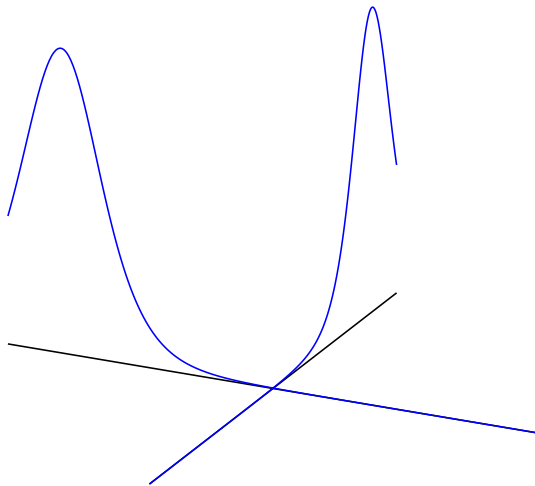
L'équation de Schrödinger non-linéaire

La solution positive sur l'étoile à 3 branches



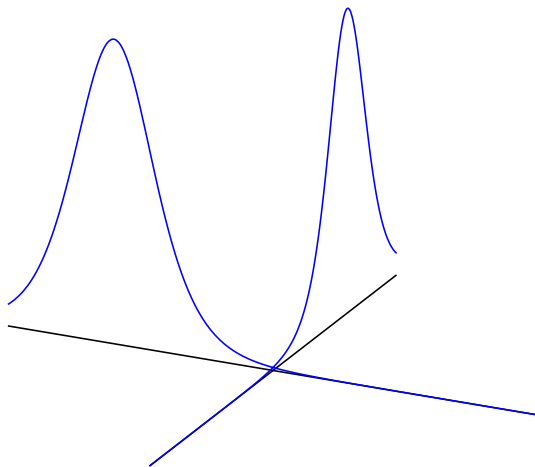
L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



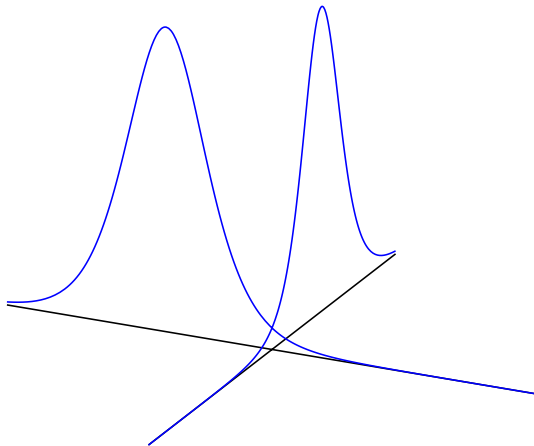
L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



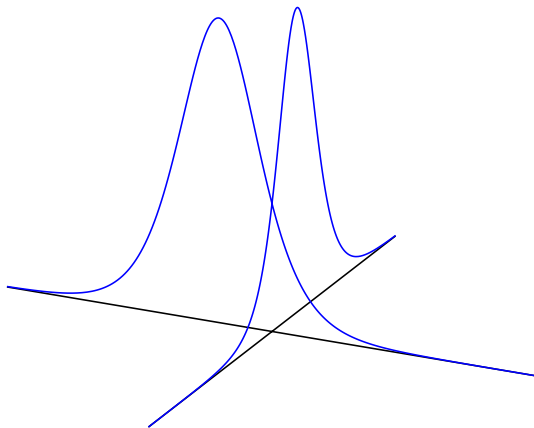
L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



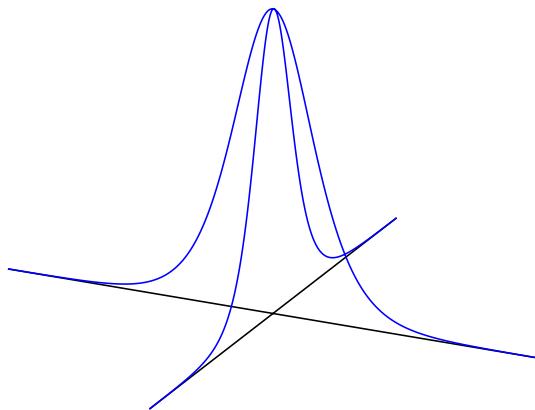
L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



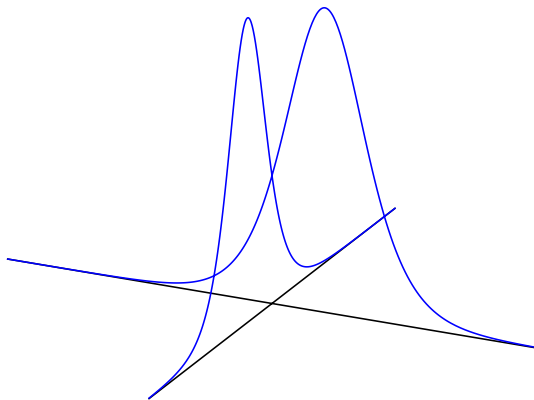
L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



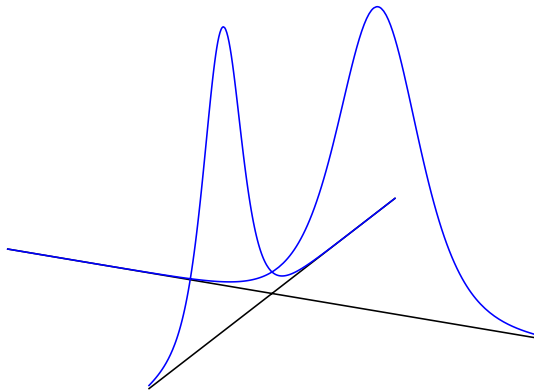
L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



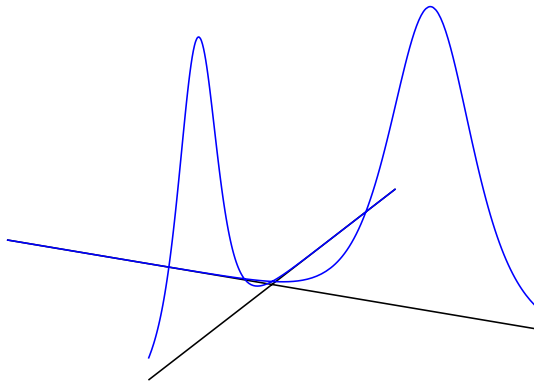
L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



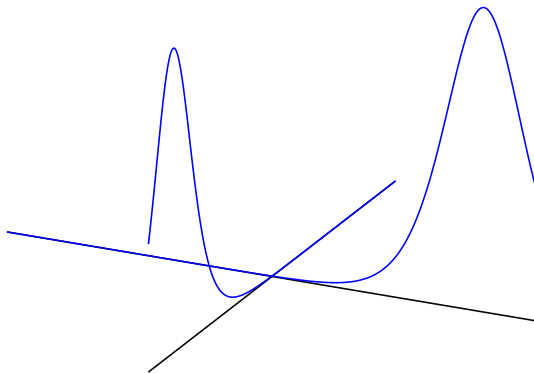
L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une approche plus conceptuelle : la fonctionnelle d'action

Sur les étoiles, on peut déterminer toutes les solutions de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ “à la main”.

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une approche plus conceptuelle : la fonctionnelle d'action

Sur les étoiles, on peut déterminer toutes les solutions de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ “à la main”. *En général, nous avons besoin d'une approche plus conceptuelle.*

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une approche plus conceptuelle : la fonctionnelle d'action

Sur les étoiles, on peut déterminer toutes les solutions de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ “à la main”. *En général, nous avons besoin d'une approche plus conceptuelle.*

Nous travaillons sur l'espace de Sobolev

$$H^1(\mathcal{G}) := \left\{ u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est continue, } u, u' \in L^2(\mathcal{G}) \right\}.$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une approche plus conceptuelle : la fonctionnelle d'action

Sur les étoiles, on peut déterminer toutes les solutions de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ “à la main”. *En général, nous avons besoin d'une approche plus conceptuelle.*

Nous travaillons sur l'espace de Sobolev

$$H^1(\mathcal{G}) := \left\{ u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est continue, } u, u' \in L^2(\mathcal{G}) \right\}.$$

Les solutions de (NLS) , λ étant donné, correspondent aux points critiques de la *fonctionnelle d'action*

$$J_{\lambda}(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p \, dx.$$

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Une approche plus conceptuelle : la fonctionnelle d'action

Sur les étoiles, on peut déterminer toutes les solutions de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ “à la main”. *En général, nous avons besoin d'une approche plus conceptuelle.*

Nous travaillons sur l'espace de Sobolev

$$H^1(\mathcal{G}) := \left\{ u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est continue, } u, u' \in L^2(\mathcal{G}) \right\}.$$

Les solutions de (NLS) , λ étant donné, correspondent aux points critiques de la *fonctionnelle d'action*

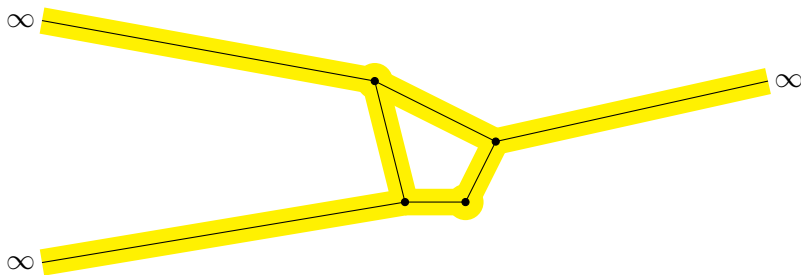
$$J_{\lambda}(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p \, dx.$$

Comment trouver de tels points critiques ?

Un peu de physique

Motivations

Modélisation de structures où *une seule direction spatiale est importante*.



Un « graphe épais » et le graphe métrique sous-jacent

Un peu de physique


Condensats de Bose-Einstein

- Lorsque N bosons identiques sont refroidis à une température très proche du zéro absolu, ils occupent un *état quantique de plus basse énergie unique*.

Un peu de physique

Condensats de Bose-Einstein

- Lorsque N bosons identiques sont refroidis à une température très proche du zéro absolu, ils occupent un *état quantique de plus basse énergie unique*.



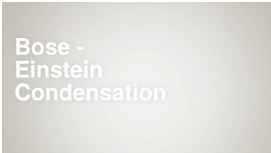
Bose -
Einstein
Condensation

Source : <https://toutestquantique.fr/condensation-de-bose-einstein/>

Un peu de physique

Condensats de Bose-Einstein

- Lorsque N bosons identiques sont refroidis à une température très proche du zéro absolu, ils occupent un *état quantique de plus basse énergie unique*.



Bose -
Einstein
Condensation

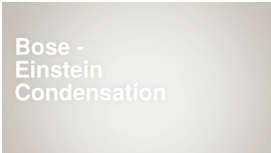
Source : <https://toutestquantique.fr/condensation-de-bose-einstein/>

- Phénomène quantique *macroscopique remarquable !*

Un peu de physique

Condensats de Bose-Einstein

- Lorsque N bosons identiques sont refroidis à une température très proche du zéro absolu, ils occupent un *état quantique de plus basse énergie unique*.



Bose -
Einstein
Condensation

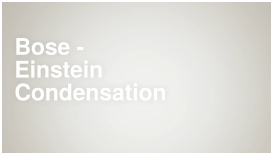
Source : <https://toutestquantique.fr/condensation-de-bose-einstein/>

- Phénomène quantique *macroscopique remarquable !*
- Depuis les années 2000 : émergence de l'*atomtronique*, qui étudie des *circuits* guidant la propagation d'atomes ultra-froids

Un peu de physique

Condensats de Bose-Einstein

- Lorsque N bosons identiques sont refroidis à une température très proche du zéro absolu, ils occupent un *état quantique de plus basse énergie unique*.



Bose -
Einstein
Condensation

Source : <https://toutestquantique.fr/condensation-de-bose-einstein/>

- Phénomène quantique *macroscopique remarquable !*
- Depuis les années 2000 : émergence de l'*atomtronique*, qui étudie des *circuits* guidant la propagation d'atomes ultra-froids → confinement du condensat dans un réseau, *modélisé par un graphe*.

Un peu de physique

Émergence de la non-linéarité

Lorsque le nombre de particules N devient grand, l'état fondamental $\psi(x_1, \dots, x_N)$ du système quantique à N corps devient « presque factorisé » :

$$\psi(x_1, \dots, x_N) \approx \phi(x_1) \cdots \phi(x_N),$$

Un peu de physique

Émergence de la non-linéarité

Lorsque le nombre de particules N devient grand, l'état fondamental $\psi(x_1, \dots, x_N)$ du système quantique à N corps devient « presque factorisé » :

$$\psi(x_1, \dots, x_N) \approx \phi(x_1) \cdots \phi(x_N),$$

où $N\phi \in H^1(\mathcal{G})$ minimise la fonctionnelle de *Gross-Pitaevskii*

$$E_{GP}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2 dx + 8\pi\alpha \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^4 dx$$

sous la contrainte $\int_{\mathcal{G}} u^2 dx = N$.

Un peu de physique

Émergence de la non-linéarité

Lorsque le nombre de particules N devient grand, l'état fondamental $\psi(x_1, \dots, x_N)$ du système quantique à N corps devient « presque factorisé » :

$$\psi(x_1, \dots, x_N) \approx \phi(x_1) \cdots \phi(x_N),$$

où $N\phi \in H^1(\mathcal{G})$ minimise la fonctionnelle de *Gross-Pitaevskii*

$$E_{GP}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2 dx + 8\pi\alpha \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^4 dx$$

sous la contrainte $\int_{\mathcal{G}} u^2 dx = N$.

La constante α dépend de l'intensité de l'interaction entre deux particules.

Un peu de physique

Émergence de la non-linéarité

Lorsque le nombre de particules N devient grand, l'état fondamental $\psi(x_1, \dots, x_N)$ du système quantique à N corps devient « presque factorisé » :

$$\psi(x_1, \dots, x_N) \approx \phi(x_1) \cdots \phi(x_N),$$

où $N\phi \in H^1(\mathcal{G})$ minimise la fonctionnelle de *Gross-Pitaevskii*

$$E_{GP}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2 dx + 8\pi\alpha \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^4 dx$$

sous la contrainte $\int_{\mathcal{G}} u^2 dx = N$.

La constante α dépend de l'intensité de l'interaction entre deux particules. Ici, $\alpha < 0$.

Un peu de physique

La fonctionnelle d'énergie

Nous sommes ainsi amenés à étudier les points critiques contraints de la *fonctionnelle d'énergie*

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx$$

Un peu de physique

La fonctionnelle d'énergie

Nous sommes ainsi amenés à étudier les points critiques contraints de la *fonctionnelle d'énergie*

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx$$

sous la *contrainte de masse*

$$\int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx = \mu.$$

Un peu de physique

La fonctionnelle d'énergie

Nous sommes ainsi amenés à étudier les points critiques contraints de la *fonctionnelle d'énergie*

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx$$

sous la *contrainte de masse*

$$\int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx = \mu.$$

Un tel point critique satisfait $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ qui apparaît comme un multiplicateur de Lagrange.

Un laboratoire pour la non-compactité

La variété de Nehari

La fonctionnelle d'action J_λ , définie par

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx,$$

n'est pas minorée sur $H^1(\mathcal{G})$.

Un laboratoire pour la non-compactité

La variété de Nehari

La fonctionnelle d'action J_λ , définie par

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx,$$

n'est pas minorée sur $H^1(\mathcal{G})$.

En effet, si $u \neq 0$, alors

$$J_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx + \frac{\lambda t^2}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx - \frac{t^p}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty.$$

Un laboratoire pour la non-compacité

La variété de Nehari

La fonctionnelle d'action J_λ , définie par

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx,$$

n'est pas minorée sur $H^1(\mathcal{G})$.

En effet, si $u \neq 0$, alors

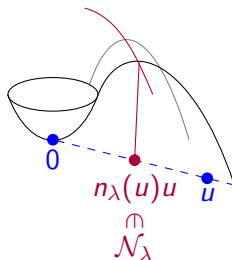
$$J_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx + \frac{\lambda t^2}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx - \frac{t^p}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty.$$

Une stratégie courante consiste à introduire la *variété de Nehari* $\mathcal{N}_\lambda(\mathcal{G})$, définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{G}) &:= \left\{ u \in H^1(\mathcal{G}) \setminus \{0\} \mid J'_\lambda(u)[u] = 0 \right\} \\ &= \left\{ u \in H^1(\mathcal{G}) \setminus \{0\} \mid \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx + \lambda \int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx = \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx \right\}. \end{aligned}$$

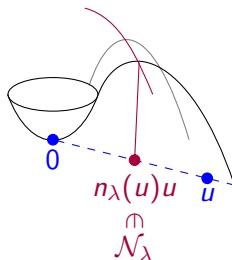
Un laboratoire pour la non-compactité

La variété de Nehari (Merci à C. Troestler pour l'image !)



Un laboratoire pour la non-compacité

La variété de Nehari (Merci à C. Troestler pour l'image !)

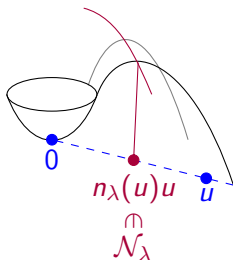


Si $u \in \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{G})$, alors

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathcal{G}} |u|^p \, dx.$$

Un laboratoire pour la non-compacité

La variété de Nehari (Merci à C. Troestler pour l'image !)



Si $u \in \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{G})$, alors

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathcal{G}} |u|^p \, \mathrm{d}x.$$

En particulier, J_λ est minorée sur $\mathcal{N}_\lambda(\mathcal{G})$.

Un laboratoire pour la non-compactité

Deux niveaux d'action

- Niveau d'action du ground state :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) := \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda}(\mathcal{G})} J_{\lambda}(u).$$

Un laboratoire pour la non-compacité

Deux niveaux d'action

- Niveau d'action du ground state :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) := \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda}(\mathcal{G})} J_{\lambda}(u).$$

- *Ground state* : fonction $u \in \mathcal{N}_{\lambda}(\mathcal{G})$ de niveau $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda)$. C'est une solution du système différentiel (NLS $_{\mathcal{G}}$).

Un laboratoire pour la non-compacité

Deux niveaux d'action

- Niveau d'action du ground state :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) := \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda}(\mathcal{G})} J_{\lambda}(u).$$

- *Ground state* : fonction $u \in \mathcal{N}_{\lambda}(\mathcal{G})$ de niveau $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda)$. C'est une solution du système différentiel $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$.
- Niveau minimal **parmi les solutions de (NLS)** :

$$\sigma_{\mathcal{G}}(\lambda) := \inf_{u \in \mathcal{S}_{\lambda}(\mathcal{G})} J_{\lambda}(u)$$

où $\mathcal{S}_{\lambda}(\mathcal{G})$ est l'ensemble des solutions non nulles de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$.

Un laboratoire pour la non-compacité

Deux niveaux d'action

- Niveau d'action du ground state :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) := \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda}(\mathcal{G})} J_{\lambda}(u).$$

- *Ground state* : fonction $u \in \mathcal{N}_{\lambda}(\mathcal{G})$ de niveau $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda)$. C'est une solution du système différentiel $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$.
- Niveau minimal **parmi les solutions de (NLS)** :

$$\sigma_{\mathcal{G}}(\lambda) := \inf_{u \in \mathcal{S}_{\lambda}(\mathcal{G})} J_{\lambda}(u)$$

où $\mathcal{S}_{\lambda}(\mathcal{G})$ est l'ensemble des solutions non nulles de $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$.

- *Solution d'action minimale* : solution $u \in \mathcal{S}_{\lambda}(\mathcal{G})$ du système différentiel $(\text{NLS}_{\mathcal{G}})$ de niveau $\sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$.

Un laboratoire pour la non-compacité

Quatre cas

Les situations suivantes sont possibles :

Un laboratoire pour la non-compactité

Quatre cas

Les situations suivantes sont possibles :

A1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteints ;

Un laboratoire pour la non-compactité

Quatre cas

Les situations suivantes sont possibles :

A1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteints ;

B1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$, $\sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ est atteint mais pas $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda)$;

Un laboratoire pour la non-compactité

Quatre cas

Les situations suivantes sont possibles :

A1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteints ;

B1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$, $\sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ est atteint mais pas $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda)$;

A2) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucun infimum n'est atteint ;

Un laboratoire pour la non-compactité

Quatre cas

Les situations suivantes sont possibles :

- A1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteints ;
- B1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$, $\sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ est atteint mais pas $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda)$;
- A2) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucun infimum n'est atteint ;
- B2) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucun infimum n'est atteint.

Un laboratoire pour la non-compactité

Quatre cas

Les situations suivantes sont possibles :

A1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteints ;

B1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$, $\sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ est atteint mais pas $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda)$;

A2) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucun infimum n'est atteint ;

B2) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucun infimum n'est atteint.

Remarque : dans les cas A2 et B2, il doit y avoir *une infinité de solutions de niveaux différents*.

Un laboratoire pour la non-compactité

Quatre cas

Les situations suivantes sont possibles :

- A1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteints ;
- B1) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$, $\sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ est atteint mais pas $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda)$;
- A2) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucun infimum n'est atteint ;
- B2) $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucun infimum n'est atteint.

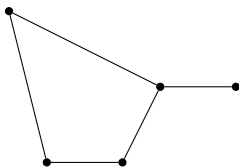
Remarque : dans les cas A2 et B2, il doit y avoir *une infinité de solutions de niveaux différents*.

Theorem (De Coster, Dovetta, G., Serra (2023))

Pour tout $p > 2$, tout $\lambda > 0$ et tout choix d'une alternative parmi A1, B1, A2, B2, il existe un graphe métrique \mathcal{G} où cette alternative se produit.

Un laboratoire pour la non-compactité

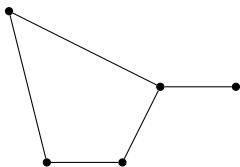
Cas A1 : $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteintes



Graphes compacts

Un laboratoire pour la non-compactité

Cas A1 : $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteintes



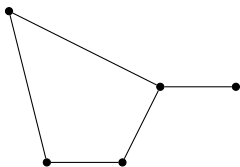
Graphes compacts



La droite

Un laboratoire pour la non-compactité

Cas A1 : $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteintes



Graphes compacts



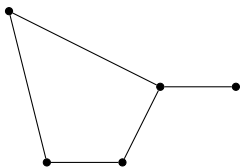
La droite



La demi-droite

Un laboratoire pour la non-compactité

Cas A1 : $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et les deux infima sont atteintes



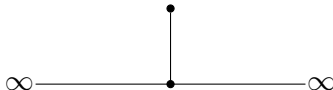
Graphes compacts



La droite



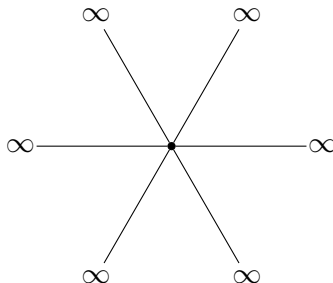
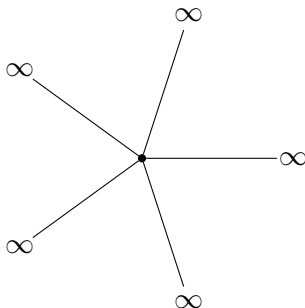
La demi-droite



Graphes avec un nombre fini d'arêtes tels que
 $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}(\lambda) < s_{\lambda} := J_{\lambda}(\phi_{\lambda})$

Un laboratoire pour la non-compactité

Cas B1 : $\mathcal{J}_G(\lambda) < \sigma_G(\lambda)$, $\sigma_G(\lambda)$ est atteint mais pas $\mathcal{J}_G(\lambda)$

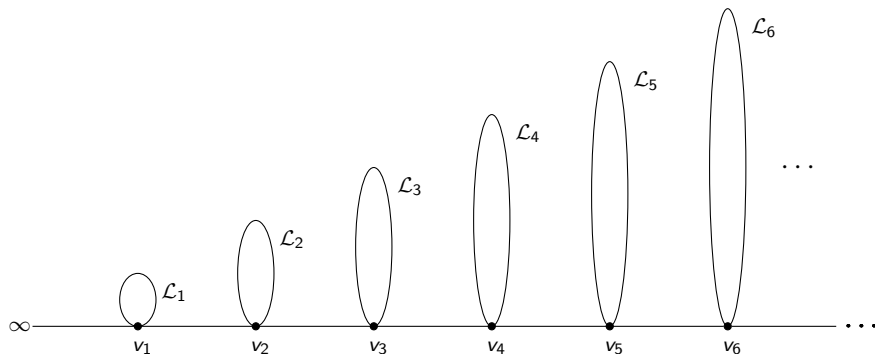


Étoiles à N branches, $N \geq 3$

$$s_\lambda = \mathcal{J}_G(\lambda) < \sigma_G(\lambda) = \frac{N}{2}s_\lambda$$

Un laboratoire pour la non-compactité

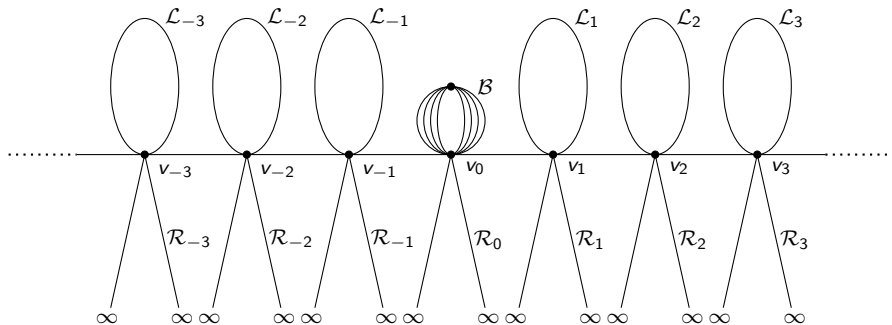
Cas A2 : $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucun infimum n'est atteint



$$s_{\lambda} = \mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$$

Un laboratoire pour la non-compactité

Cas B2 : $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$ et aucune infimum n'est atteint



$$s_{\lambda} = \mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\lambda) < \sigma_{\mathcal{G}}(\lambda)$$

Nouveaux phénomènes

Nodal action ground states

- Les *nodal action ground states* sont les minimiseurs de la fonctionnelle d'action J_λ sur l'ensemble de *Nehari nodal*

$$\mathcal{N}_\lambda^{\text{nod}}(\mathcal{G}) := \left\{ u \in H^1(\mathcal{G}) \mid u^\pm \in \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{G}) \right\}$$

où $u^+ := \max(u, 0)$ et $u^- := \min(u, 0)$.

Nouveaux phénomènes

Nodal action ground states

- Les *nodal action ground states* sont les minimiseurs de la fonctionnelle d'action J_λ sur l'ensemble de *Nehari nodal*

$$\mathcal{N}_\lambda^{\text{nod}}(\mathcal{G}) := \left\{ u \in H^1(\mathcal{G}) \mid u^\pm \in \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{G}) \right\}$$

où $u^+ := \max(u, 0)$ et $u^- := \min(u, 0)$.

- S'ils existent, les nodal action ground states sont des solutions de $(\text{NLS}_\mathcal{G})$ qui changent de signe.

Nouveaux phénomènes

Nodal action ground states

- Les *nodal action ground states* sont les minimiseurs de la fonctionnelle d'action J_λ sur l'ensemble de *Nehari nodal*

$$\mathcal{N}_\lambda^{nod}(\mathcal{G}) := \left\{ u \in H^1(\mathcal{G}) \mid u^\pm \in \mathcal{N}_\lambda(\mathcal{G}) \right\}$$

où $u^+ := \max(u, 0)$ et $u^- := \min(u, 0)$.

- S'ils existent, les nodal action ground states sont des solutions de $(\text{NLS}_\mathcal{G})$ qui changent de signe.
- Ils n'existent pas toujours en raison d'une possible perte de compacité.

Nouveaux phénomènes

Votre graphe préféré possède-t-il des ground states ? (Merci à C. De Coster et E. Serra !)

Graphe (sans sommets de Dirichlet)	Ground state	Nodal GS
droite réelle, demi-droite	Oui	Non
graphes en étoile ($N \geq 3$)	Non	Non
têtard (tadpole)	Oui	Non
graphe en \mathcal{T}	Oui	Non
panneau (signpost)	Oui	Non
fourche (fork)	Oui	Dép. longueurs
connexion des graphes précédents	Dép. longueurs	Dép. longueurs
tour de bulles	Oui	Non
droite avec ponts	Non	Non
graphes avec 1 long pendant	Oui	Dép. longueurs
graphes avec 2 longs pendants	Oui	Oui
graphes périodiques	Oui	Non
arbres réguliers	Oui	Non

Nouveaux phénomènes

Échec du principe de prolongement unique

Theorem (De Coster, Dovetta, G., Serra, Troestler (2024))

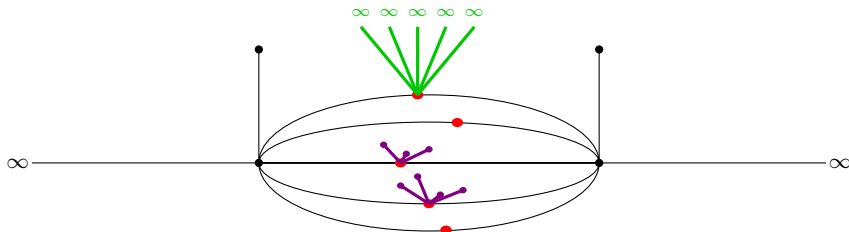
Pour tous entiers naturels k, m, n avec $m \geq 2$, il existe un graphe \mathcal{G} et un nodal action ground state u sur \mathcal{G} tels que l'ensemble $u^{-1}(\{0\})$ est l'union de k points isolés, m demi-droites et n segments de droite.

Nouveaux phénomènes

Échec du principe de prolongement unique

Theorem (De Coster, Dovetta, G., Serra, Troestler (2024))

Pour tous entiers naturels k, m, n avec $m \geq 2$, il existe un graphe \mathcal{G} et un nodal action ground state u sur \mathcal{G} tels que l'ensemble $u^{-1}(\{0\})$ est l'union de k points isolés, m demi-droites et n segments de droite.



Nouveaux phénomènes

Symétries intéressantes : le graphe du tétraèdre

Il est intéressant de comprendre les ensembles nodaux de certaines solutions et le phénomène de solutions s'annulant sur des arêtes.

Nouveaux phénomènes

Symétries intéressantes : le graphe du tétraèdre

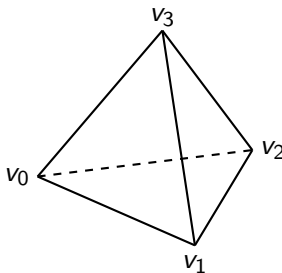
Il est intéressant de comprendre les ensembles nodaux de certaines solutions et le phénomène de solutions s'annulant sur des arêtes. Nous avons étudié ces questions dans le régime asymptotique $p \approx 2$.

Nouveaux phénomènes

Symétries intéressantes : le graphe du tétraèdre

Il est intéressant de comprendre les ensembles nodaux de certaines solutions et le phénomène de solutions s'annulant sur des arêtes. Nous avons étudié ces questions dans le régime asymptotique $p \approx 2$.

Le graphe du *tétraèdre* a été analysé en détail.

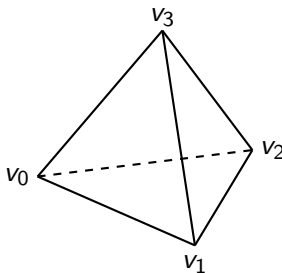


Nouveaux phénomènes

Symétries intéressantes : le graphe du tétraèdre

Il est intéressant de comprendre les ensembles nodaux de certaines solutions et le phénomène de solutions s'annulant sur des arêtes. Nous avons étudié ces questions dans le régime asymptotique $p \approx 2$.

Le graphe du *tétraèdre* a été analysé en détail.



Pour réaliser cette analyse, nous avons utilisé une *preuve assistée par ordinateur*.

La contrainte comme source d'inspiration

Solutions normalisées

Une *solution normalisée* de (NLS) sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ est une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u,$$

dont la norme L^2 est fixée et où le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ est laissé libre.

La contrainte comme source d'inspiration

Solutions normalisées

Une *solution normalisée* de (NLS) sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ est une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u,$$

dont la norme L^2 est fixée et où le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ est laissé libre.

Cela correspond à un point critique de la *fonctionnelle d'énergie*

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \, dx$$

sur la sphère L^2

$$\mathcal{M}_{\mu}(\Omega) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \int_{\mathcal{G}} |u|^2 \, dx = \mu \right\}.$$

La contrainte comme source d'inspiration

Solutions normalisées

Une *solution normalisée* de (NLS) sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ est une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u,$$

dont la norme L^2 est fixée et où le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ est laissé libre.

Cela correspond à un point critique de la *fonctionnelle d'énergie*

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx$$

sur la sphère L^2

$$\mathcal{M}_{\mu}(\Omega) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} |u|^2 dx = \mu \right\}.$$

On peut montrer que E est :

- bornée inférieurement sur \mathcal{M}_{μ} si $2 < p < 2 + \frac{4}{N}$ ($= 6$ si $N = 1$);
- non bornée inférieurement sur \mathcal{M}_{μ} si $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$.

La contrainte comme source d'inspiration

Deux questions

Comment trouver des solutions normalisées (d'énergie minimale) dans le régime L^2 -supercritique $2 + \frac{4}{N} < p < 2^$?*

La contrainte comme source d'inspiration

Deux questions

Comment trouver des solutions normalisées (d'énergie minimale) dans le régime L^2 -supercritique $2 + \frac{4}{N} < p < 2^$?*

Comment trouver des solutions normalisées nodales ?

La contrainte comme source d'inspiration

Deux questions

Comment trouver des solutions normalisées (d'énergie minimale) dans le régime L^2 -supercritique $2 + \frac{4}{N} < p < 2^$?*

Comment trouver des solutions normalisées nodales ?

Au début de la thèse :

La contrainte comme source d'inspiration

Deux questions

Comment trouver des solutions normalisées (d'énergie minimale) dans le régime L^2 -supercritique $2 + \frac{4}{N} < p < 2^$?*

Comment trouver des solutions normalisées nodales ?

Au début de la thèse :

- la première question avait reçu beaucoup d'attention dans la littérature pour $\Omega = \mathbb{R}^N$, suite aux travaux fondateurs de L. Jeanjean dans les années 1990 ;

La contrainte comme source d'inspiration

Deux questions

Comment trouver des solutions normalisées (d'énergie minimale) dans le régime L^2 -supercritique $2 + \frac{4}{N} < p < 2^$?*

Comment trouver des solutions normalisées nodales ?

Au début de la thèse :

- la première question avait reçu beaucoup d'attention dans la littérature pour $\Omega = \mathbb{R}^N$, suite aux travaux fondateurs de L. Jeanjean dans les années 1990 ;
- la seconde question était essentiellement inexplorée.

La contrainte comme source d'inspiration

État de l'art des solutions normalisées avant la thèse

Les articles traitant des généralisations des résultats d'existence de solutions normalisées lorsque $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$ sont restés très proches de la technique initiale de Jeanjean,

La contrainte comme source d'inspiration

État de l'art des solutions normalisées avant la thèse

Les articles traitant des généralisations des résultats d'existence de solutions normalisées lorsque $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$ sont restés très proches de la technique initiale de Jeanjean, souvent au prix d'hypothèses techniques fortes sur les équations étudiées.

La contrainte comme source d'inspiration

État de l'art des solutions normalisées avant la thèse

Les articles traitant des généralisations des résultats d'existence de solutions normalisées lorsque $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$ sont restés très proches de la technique initiale de Jeanjean, souvent au prix d'hypothèses techniques fortes sur les équations étudiées.

Comment réaliser une véritable extension des résultats sans faire trop d'hypothèses techniques ?

La contrainte comme source d'inspiration

La philosophie

Peut-être que les écrivains pourraient nous montrer la voie...

La contrainte comme source d'inspiration

La philosophie

Peut-être que les écrivains pourraient nous montrer la voie...

La contrainte agit d'abord comme un stimulant de la création : bornant l'imaginaire, elle fait paradoxalement prendre conscience à l'écrivain de l'étendue de sa liberté, d'où son efficacité en matière de production du texte. Le texte jaillit, ici et maintenant, poussé par une nécessité externe qui permet de lutter contre les vents internes qui pourraient se montrer contraires.

— Usage de la contrainte, Paul Fournel (membre de l'Oulipo)

Source : <https://www.oulipo.net/fr/usage-de-la-contrainte>.

La contrainte comme source d'inspiration

La philosophie

Peut-être que les écrivains pourraient nous montrer la voie...

La contrainte agit d'abord comme un stimulant de la création : bornant l'imaginaire, elle fait paradoxalement prendre conscience à l'écrivain de l'étendue de sa liberté, d'où son efficacité en matière de production du texte. Le texte jaillit, ici et maintenant, poussé par une nécessité externe qui permet de lutter contre les vents internes qui pourraient se montrer contraires.

— Usage de la contrainte, Paul Fournel (membre de l'Oulipo)

Source : <https://www.oulipo.net/fr/usage-de-la-contrainte>.

En remplaçant \mathbb{R}^N par des graphes métriques non compacts, on est *contraint* de changer de méthode, avec l'*avantage* de travailler en dimension un.

La contrainte comme source d'inspiration

Quelques retombées du périple à travers les graphes

■ Nouvel outil « abstrait » :



J. Borthwick, X. Chang, L. Jeanjean, N. Soave

*Bounded Palais-Smale sequence with Morse type information
for some constrained functionals*

Transactions of the AMS, Vol. 377, No. 6 (2024)

La contrainte comme source d'inspiration

Quelques retombées du périple à travers les graphes

■ Nouvel outil « abstrait » :



J. Borthwick, X. Chang, L. Jeanjean, N. Soave

*Bounded Palais-Smale sequence with Morse type information
for some constrained functionals*

Transactions of the AMS, Vol. 377, No. 6 (2024)

→ Appliqué pour obtenir un résultat de multiplicité de solutions
normalisées pour un problème L^2 -supercritique sur les graphes.

La contrainte comme source d'inspiration

Quelques retombées du périple à travers les graphes

■ Nouvel outil « abstrait » :



J. Borthwick, X. Chang, L. Jeanjean, N. Soave

Bounded Palais-Smale sequence with Morse type information for some constrained functionals

Transactions of the AMS, Vol. 377, No. 6 (2024)

→ Appliqué pour obtenir un résultat de multiplicité de solutions normalisées pour un problème L^2 -supercritique sur les graphes.

■ Nouveaux liens entre l'action et l'énergie :



S. Dovetta, E. Serra, P. Tilli

Action versus energy ground states in nonlinear Schrödinger equations

Mathematische Annalen, Vol. 385 (2023)

La contrainte comme source d'inspiration

Quelques retombées du périple à travers les graphes

■ Nouvel outil « abstrait » :



J. Borthwick, X. Chang, L. Jeanjean, N. Soave

Bounded Palais-Smale sequence with Morse type information for some constrained functionals

Transactions of the AMS, Vol. 377, No. 6 (2024)

→ Appliqué pour obtenir un résultat de multiplicité de solutions normalisées pour un problème L^2 -supercritique sur les graphes.

■ Nouveaux liens entre l'action et l'énergie :



S. Dovetta, E. Serra, P. Tilli

Action versus energy ground states in nonlinear Schrödinger equations

Mathematische Annalen, Vol. 385 (2023)

→ Étendu à un *résultat d'existence pour les solutions normalisées*.

La contrainte comme source d'inspiration

Masses des nodal action ground states

Theorem (De Coster, Dovetta, G., Serra (2024))

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Pour tout $p \in]2, 2^*[$, soit

$$M_p(\Omega) := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \mid u \text{ ground state pour un } \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

$$M_p^{nod}(\Omega) := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \mid u \text{ nodal GS pour un } \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

La contrainte comme source d'inspiration

Masses des nodal action ground states

Theorem (De Coster, Dovetta, G., Serra (2024))

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Pour tout $p \in]2, 2^*[$, soit

$$M_p(\Omega) := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \mid u \text{ ground state pour un } \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

$$M_p^{nod}(\Omega) := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \mid u \text{ nodal GS pour un } \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors,

(i) si $2 < p < 2 + \frac{4}{N}$, alors $M_p(\Omega) = M_p^{nod}(\Omega) =]0, +\infty[$;

La contrainte comme source d'inspiration

Masses des nodal action ground states

Theorem (De Coster, Dovetta, G., Serra (2024))

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Pour tout $p \in]2, 2^*[$, soit

$$M_p(\Omega) := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \mid u \text{ ground state pour un } \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

$$M_p^{nod}(\Omega) := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \mid u \text{ nodal GS pour un } \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors,

- (i) si $2 < p < 2 + \frac{4}{N}$, alors $M_p(\Omega) = M_p^{nod}(\Omega) =]0, +\infty[$;
- (ii) si $p \geq 2 + \frac{4}{N}$, alors il existe $\mu_p, \mu_p^{nod} \in]0, +\infty[$ tels que $(0, \mu_p) \subseteq M_p(\Omega) \subseteq]0, \mu_p]$ et $(0, \mu_p^{nod}) \subseteq M_p^{nod}(\Omega) \subseteq]0, \mu_p^{nod}]$.

Le mot de la fin

Messages à retenir

Les graphes métriques permettent d'étudier des problèmes *unidimensionnels* intéressants et sont bien plus riches que la classe habituelle des intervalles de \mathbb{R} .

Le mot de la fin

Messages à retenir

Les graphes métriques permettent d'étudier des problèmes *unidimensionnels* intéressants et sont bien plus riches que la classe habituelle des intervalles de \mathbb{R} .

La physique sera toujours une grande source d'inspiration pour les mathématiciens.

Le mot de la fin

Messages à retenir

Les graphes métriques permettent d'étudier des problèmes *unidimensionnels* intéressants et sont bien plus riches que la classe habituelle des intervalles de \mathbb{R} .

La physique sera toujours une grande source d'inspiration pour les mathématiciens.

Parfois, la meilleure façon de progresser sur un problème est d'en considérer *un autre*.

Le mot de la fin

Si vous avez un problème difficile...

Le mot de la fin

Si vous avez un problème difficile...

pourquoi ne pas l'essayer d'abord sur les graphes métriques ?

Le mot de la fin

Si vous avez un problème difficile...

pourquoi ne pas l'essayer d'abord sur les graphes métriques ?

Merci !